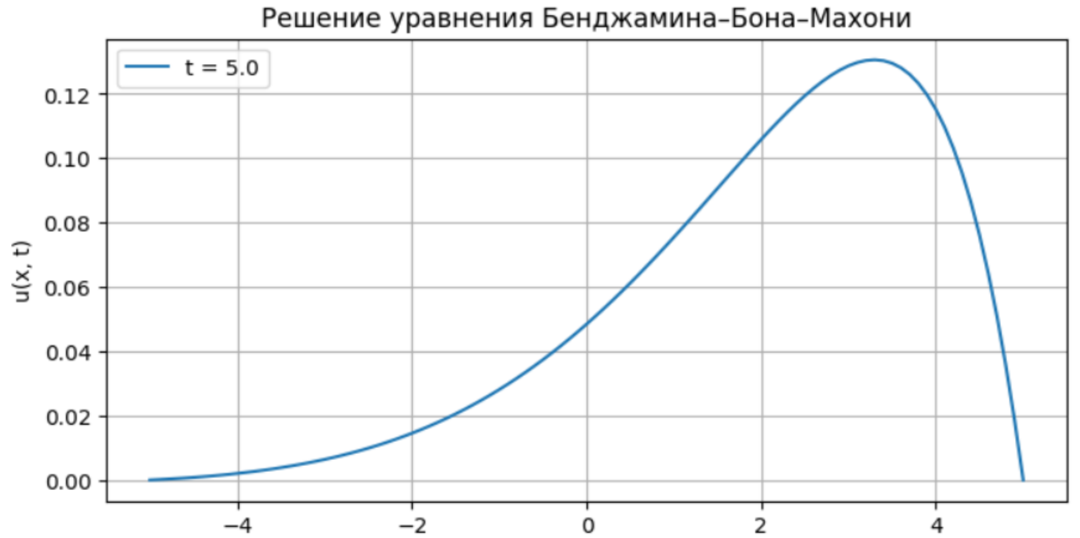

1-сүрөт.

Адабияттар:

1. Sweilam N. H., Abou Hasan M. M., Aalbalawi A. O. Numerical solutions of Benjamin-Bona-Mahony-burgers equation via nonstandard finite difference scheme // Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 6(2) July 2018, pp. 237-245.
2. Omrani K., Ayadi M., Finite di erence discretization of the Benjamin- Bona-Mahony Burgers equation, Numerical Methods for Partial Di erential Equations, 24, 1, (2008), 239 248, 10.1002/num. 20256.
3. Бенджамин Т. Б., Бона Дж. Л., и Махони Дж. Дж., Модель уравнения для длинный волны в нелинейный дисперсионный системы. Филос Транс Рой Соц. Лонд A 272 (1972), pp. 47–78.
4. Раупп М. А., Галеркин методы применяемый к Бенджамин-Бона-Махони уравнение. Бол Соц. Бразилия Мат6 (1975), pp. 65–77.
5. Каракеев, Т. Т. Регуляризация нелокальной краевой задачи для уравнения Бенжамина-Бона-Махони [Текст] / Т. Т. Каракеев, Д. К. Рустамова // Приволжский научный вестник. - 2016. - № 1(53). - С. 10-15. - EDN VJLTEP.

DOI: https://doi.org/10.69722/1694-8211-2025-61-9-16
УДК: 519.63

Аскербекова А. А., *магистрант*
ssaikal264@gmail.com
ORCID: 0009-0001-0399-4202
Дюшебаева А., *магистрант*
diushebaevva@gmail.com
ORCID: 0009-0004-2756-9587
К. Тыныстанов ат. ЫМУ
Каракол ш., Кыргызстан

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИ ТҮШҮНҮГҮ

Макаланын максаты – дифференциалдык теңдемелердин жардамы менен берилген тескери жана корректтүү эмес маселелердин чыгарылышын табууда чыгаруудагы көйгөйлөрдү ачып берүү. Кандайдыр бир физикалык кубулушту изилдөөдө изилдөөчү, биринчи кезекте, анын математикалык идеализациясын түзөт же башкача айтканда, математикалык моделин түзөт, кубулуштун негизги эмес мүнөздөмөлөрүн этибарга албай, бул кубулушту башкаруучу негизги мыйзамдарды математикалык формада жазат. Көп учурда бул мыйзам ченемдиктерди дифференциалдык теңдемелер түрүндө көрсөтүүгө болот.

Авторлор математикалык физиканын корректтүү жана корректтүү эмес коюлган маселелеринин негизги өзгөчөлүктөрү менен түшүнүктөрүн ачып көрсөтүшкөн. Андан сырткары, математикалык физиканын маселелериндеги тескери маселелердин классификациясы жана жалпы түшүнүгү тууралуу сөз болот. Корректтүү жана корректтүү эмес коюлган маселерге мисалдар келтирилет. Мындай маселелердин чыгарылышын табуу методдору боюнча жалпы түшүнүк берилет.

Түйүндүү сөздөр: *дифференциалдык теңдемелер, тескери маселе, корректтүү эмес маселе, баштапкы шарт, четки шарт, маселенин модели, теңдемелерди чыгаруу, жакындатылган методдор, сандык методдор, Коши маселеси, дифференциалдык оператор, интеграл, теңдемелер системасы, так чыгарылыш.*

Аскербекова А. А., *магистрант*
ssaikal264@gmail.com
ORCID: 0009-0001-0399-4202
Дюшебаева А., *магистрант*
diushebaevva@gmail.com
ORCID: 0009-0004-2756-9587
ИГУ им. К. Тыныстанова
г. Каракол, Кыргызстан

ПОНЯТИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель статьи − раскрыть проблемы при решении обратных и некорректно поставленных задач заданными дифференциальными уравнениями. Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений.

Авторами подчеркнуты основные особенности и основные понятия о корректных и некорректных задачах математической физики. Кроме того излагается обзор и классификация обратных задач математической физики. Приводятся ряд примеров корректных и некорректных задач. Дается общий обзор методов решения подобных задач.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения, обратная задача, некорректная задача, начальное условие, граничное условие, модель задачи, решение уравнения, приближенные методы, численные методы, задача Коши, дифференциальный оператор, интеграл, система уравнений, точное решение.*

Askerbekova A., *master's student,*
ssaikal264@gmail.com
ORCID: 0009-0001-0399-4202
Dyushebaeva A., *master's student,*
diushebaevva@gmail.com
ORCID: 0009-0004-2756-9587
K. Tynystanov Issyk-Kul state university
Karakol, Kyrgyzstan

THE CONCEPT OF THE INVERSE PROBLEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

The purpose of the article is to reveal the problems in solving inverse and ill-posed problems with given differential equations. When studying any physical phenomenon, the researcher first of all creates its mathematical idealization or, in other words, a mathematical model, that is, neglecting the secondary characteristics of the phenomenon, he writes down the basic laws governing this phenomenon in mathematical form. Very often these laws can be expressed in the form of differential equations.

The authors emphasize the main features and fundamental concepts of correct and incorrect problems of mathematical physics. In addition, a review and classification of inverse problems of mathematical physics is presented. A number of examples of correct and incorrect problems are given. A review of methods for solving such problems is given.

Keywords: *Differential equations, inverse problem, incorrect task, initial condition, boundary condition, problem model, solution of equation, approximate methods, numerical methods, Cauchy problem, differential operator, integral, system of equations, exact solution.*

Колдонмо маселелерди сандык методдор менен чыгарууда изилденүүчү маселелердин корректтүү коюлушу маанилүү роль ойнойт. Маселени чыгарып баштоодон мурда ал маселенин чыгарылышы баштапкы маалыматтардан үзгүлтүксүз көз карандыбы, б. а., изилденүүчү чыгарылыш кирме маалыматтардын өзгөрүүлөрүнө карата туруктуу болобу деген суроого жооп табуу өтө маанилүү. Эгерде чыгарылыш кирме маалыматтар боюнча туруктуу болсо, анда кирме маалыматтардагы кичине каталыктар чыгарылыштын да кичине өзгөрүүсүнө алып келет. Туруктуу эмес же корректтүү эмес маселелерде так эмес кирме маалыматтарга туура келген жакындатылган чыгарылыш изделүүчү так чыгарылыштан абдан чоң айырмаланышы мүмкүн. Ал эми корректтүү эмес маселелер физиканын, математиканын, техниканын, экономиканын ж. б. ар түрдүү областтарында көп чыгат.

Математикада тескери жана корректтүү эмес коюлган маселелерге кызыгуу 20-кылымдын башында пайда болгон. 1902-жылы Дж. Адамар дифференциалдык теңдемелер үчүн маселенин коюлушунун корректтүүлүгү жөнүндөгү түшүнүктү киргизген. Жалгыз чыгарылышка ээ болгон жана берилиштерден үзгүлтүксүз көз каранды болгон маселе Адамардын туюндуруусу боюнча корректтүү маселе деп аталат. Ошондой эле Адамар корректтүү эмес коюлган маселенин мисалын келтирген (Лаплас теңдемеси үчүн Коши маселеси).

1943-жылы А. Н. Тихонов мындай маселелердин практикалык маанисин жана алардын чыгарылышын туруктуу жакындаштыруу мүмкүнчүлүгүн көрсөткөн. 20-кылымдын 50-60-жылдарында корректтүү эмес коюлган маселелердин теориясына негиз болгон бир катар жаңы ыкмалар пайда болгон жана алар көптөгөн математиктердин көңүлүн бурган.

А. Н. Тихонов буга чейин Ж. Адамар белгилеген корректтүү эмес маселелердин коюлушу табигый болуп кала тургандай талаптарды койду. Бул талаптардын негизи болуп чыгарылыштын бар болуусу жана анын кандайдыр бир берилген компактыга тиешелүү экендиги тууралуу априордук божомол эсептелет. А. Н. Тихонов регулярдоо деген түшүнүк киргизген, ал боюнча корректтүү эмес коюлган маселенин так чыгарылышын бере турган чектелбеген оператордун ордуна регулярдоочу операторлордун удаалаштыгы киргизилет. Чыгарылыштардын жашоо областында жаткан ар бир элементке туура келген мындай удаалаштык чыгарылышка умтулгандай болуп түзүлөт.

Корректтүү эмес маселелердин теориясынын жана аларды чыгаруу методдорунун негиздери А. Н. Тихоновдун, В. К. Ивановдун, М. М. Лаврентьевдин, Г. И. Марчуктун ж. б. эмгектеринде иштелип чыккан. Азыркы учурда корректтүү эмес маселелердин жетиштүү көлөмдөгү толук теориясы жана аларды чыгаруунун жакындатылган методдору түзүлгөн, алардын жардамы менен көптөгөн колдонмо маселелер ийгиликтүү чыгарылып жатат.

Күчтүү компьютерлердин пайда болушу менен тескери жана корректтүү эмес коюлган маселелерге кызыгуу тездик менен өсө баштаган. Бүгүнкү күндө тескери жана корректтүү эмес коюлган маселелер математиканын дээрлик бардык тармактарына, анын ичинде алгебра, анализ, геометрия, дифференциалдык теңдемелер, математикалык физика, функционалдык анализ жана эсептөө математикасы сыяктуу тармактарына сүңгүп кирип, тез өнүгүп жаткан билим тармагына айланды. Бул жерден ар бир корректтүү эмес коюлган маселе кандайдыр бир корректтүү коюлган түз маселенин тескериси катары тигил же бул жол менен түзүлүшү мүмкүн экенин эске алсак болот.

Ошондой эле тескери жана корректтүү эмес коюлган маселелердин теориясы практикалык маселелерди чечүү үчүн илимдин дээрлик бардык тармактарында кеңири колдонулат, атап айтканда:

- физикада (кванттык механика, акустика, электродинамика, фотоника ж. б.);
- геофизикада (сейсмочалгындоо, электрдик чалгындоо, магниттик чалгындоо, каротаж, магнитотеллурикалык зонддоо ж. б.);
- медицинада (рентгендик томография, МР-томография, УЗИ ж. б.);
- экологияда (абанын, суунун абалын диагностикалоодо, космостон мониторинг жүргүзүү ж. б.);
- экономикада (оптималдуу башкаруу теориясы, финансылык математика ж. б.);
- эпидемиологияда (SIR-модели жана COVID-19 моделдөө, КРВИ, ВИЧ-инфекция жана туберкулездун таркалышы).

Түз маселени коюуда процесс изилденип жаткан аймак, бул процессти сүрөттөгөн теңдеме, ошондой эле баштапкы жана чектик шарттар көрсөтүлөт.

Кеңири мааниде «тескери маселелерди» натыйжалардан себептерди аныктоо маселелери деп атоого болот, башкача айтканда, себеп-натыйжа байланышындагы маселелер. Дифференциалдык теңдемелердеги тескери маселелер деп адатта түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кандайдыр бир кошумча маалыматка негизделген коэффициенттерди, бош мүчөлөрдү, ошондой эле баштапкы же четки шарттарды аныктоо маселелери деп түшүнсөк болот. Мында коэффициенттер, бош мүчөлөр, баштапкы жана четки шарттар – мына ушулар аныкталышы керек болгон жогоруда айтылган себептер болуп саналат. Мисалы, кандайдыр бир теңдеменин коэффициенттери, эреже катары, чөйрөнүн касиеттерин мүнөздөйт жана бул касиеттер (б. а., себептер) көбүнчө белгисиз болот жана аларды аныктоо изилдөөчү үчүн кызыгуу жаралат. Ал эми теңдеменин чыгарылышы (б. а., натыйжасы) жөнүндө кошумча маалыматтар ар кандай башка мүнөздө болушу мүмкүн. Мисалы, көп учурда кошумча маалыматтар кандайдыр бир аймакка тиешелүү түз маселенин чыгарылышынын изи катары берилет деп эсептелет. Негизи, кошумча маалыматтардын төмөндөгүдөй түрлөрү бар:

1) соңку, же б. а., финалдык жокко чыгаруулар;
2) белгиленген мейкиндик чекитинде убакыт боюнча кайра аныктоо;
3) интегралдык түрдү кайра аныктоо.

Физикалык мааниде кошумча маалымат изилдөөчү тарабынан берилген өлчөөлөрдүн натыйжасы катары чечмеленет.

Тескери маселелердеги негизги маселелер болуп алардын сызыктуу эместиги, ал эми сызыктуу учурда тескери оператордун чексиздиги саналат [1].

Тескери маселелерди чыгаруунун сандык методдору эки негизги топко бөлүнөт: түз жана итерациялык. Итерациялык методдорго оптималдоо методдору, Ньютон-Канторовичтин методдору жана алардын модификациялары кирет. Ал эми түз методдорго линеаризациялоо методдору жана Гельфанд–Левитан–Марченко–Крейндин методдору кирет.

Тескери маселелерди чыгарууда эң чоң кыйынчылык жараткан – туруксуздук.

Тескери маселелердин коюлушуна мисалдарды келтирели:

I. Мейли, $u_x - u_y + q(x)u = 0, \quad (x,y) \in R^2$ (1)

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in R \qquad (2)$$

Коши маселеси берилсин. Мында $q(x) \in C(R)$ болсун.

Эгерде q, φ функциялары берилсе, анда (1), (2) маселе корректтүү коюлган болот. Бул маселенин классикалык чыгарылышы жашаш үчүн $\varphi(x)$ функциясынын үзгүлтүксүз дифференциалдануучулугун талап кылуу жетиштүү. Мейли, бул шарт аткарылсын дейли. Эми (1), (2) маселенин чыгарылышы боюнча кошумча

$$u(0,y) = \psi(y),\ y \in R \qquad (3)$$

маалыматтын негизинде $q(x)$ табуу маселесин карайлы.

(1), (2) түз маселенин чыгарылышы

$$u(x,y) = \varphi(x+y)\exp\left(\int_{x+y}^{x} q(\xi)d\xi\right),\ y \in R$$

формуласы менен алынат.

(3) шарттын негизинде $$u(y) = \varphi(y)\exp\left(\int_{y}^{0} q(\xi)d\xi\right),\ y \in R \qquad (4)$$

барабардыкты алабыз. Мейли, эми төмөнкү шарттар аткарылсын:

$$1)\ \psi(y) \in C(R),$$

$$2)\ \psi(y) \mid \varphi(y) > 0,\ y \in R,\ \varphi(0) = \psi(0).$$

Анда берилген тескери маселенин чыгарылышы төмөнкү формула менен табылат:

$$q(x) = -\frac{d}{dx}\ln\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},\ x \in R.$$

II. Математикалык физикадагы акустиканын теңдемеси үчүн төмөнкүдөй баштапкы жана четки түз маселени коё алабыз:

Мейли R^n - Евклиддик мейкиндигинде $\Omega \subset R^n$ областы $\Gamma = \partial\Omega$ чегине ээ болсун.

$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)$ баштапкы жана

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}|_{\Gamma}=g(x,t)$ четки шарттарын канааттандырган

$$c^{-2}(x)u_{tt}(x,t)=\Delta u(x,t)-\nabla Ln\rho(x,t)\nabla u+h(x,t)$$

акустиканын тендемесинин $u(x,t)$ чыгарылышын табуу керек болсун. Бул маселе математикалык физиканын көпчүлүк түз маселелери сыяктуу корректтүү, башкача айтканда, маалыматтардын кичинекей өзгөрүүсүнө туруктуу жана чыгарылышка ээ.

Ал эми тескери маселеде бул түз маселеге кирген $u(x,t)$ функциядан тышкары кандайдыр бир башка функциялар белгисиз болот. Бул белгисиздер тескери маселенин чыгарылышы болот. Аларды табыш үчүн берилген теңдемелерге түз маселенин чыгарылышы жөнүндө кошумча маалыматтар кошулат, алар тескери маселенин маалыматтары болуп саналышат. Мисалы,

$$u(x,t)|_{\Gamma}=f(x,t)$$

түз маселенин чыгарылышынын чектеги мааниси кошумча маалымат болсун. Мында тескери маселе болуп кошумча берилген $f(x,t)$ функциясы аркылуу түз маселеге кирген белгисиз функцияларды аныктоо болуп саналат.

Берилген тендемеде функциялардын кайсынысы белгисиз экендигине жараша математикалык физиканын тескери маселелери ар кандай түрлөргө бөлүнөт. Мисалы, баштапкы шарттарды калыбына келтирүү маселеси каралса, тескери маселе **ретроспективдүү** деп аталат. Ал эми четки шартта камтылган функцияны табуу керек болсо, тескери маселе **четки** деп аталат. Бул учурда жетишпеген четки шарттар кошумча, мисалы, областтын ичиндеги өлчөөлөр менен идентификацияланат. Алсак, (1) параболалык тендемеде $[0,l]$ кесиндисинин четтеринде өлчөөлөр мүмкүн эмес болуп, берилген кесиндинин ички x^* чекитиндеги чыгарылышы белгилүү болсун, башкача айтканда, төмөнкү шарт менен берилсе:

$$u(x,t)=0,\ u(x^*,t)=\varphi(t),\quad 0<t<T.$$

Ал эми мисал катары алынган акустиканын негизги тендемесиндеги $c(x),\ \rho(x)$ коэффициенттерин табуу керек болсо, анда тескери маселе **коэффициенттик** деп аталат. Мисал катары

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t<T \qquad (5)$$

параболалык тендемесин алалы.

Бул жерде түз маселе болуп (5) тендемени жана

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\quad 0<t<T \qquad (6)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad 0<x<l \qquad (7)$$

шарттарын канааттандырган $u(x,t)$ функциясын табуу керек. Бирок көбүнчө колдонмо маселелерде чөйрөнүн касиеттери белгисиз болуп, аларды аныктоого туура

келет. Бул мисалга бир тектүү чөйрө үчүн жөнөкөй учуру болуп $k(x)$ коэффициентин идентификациялоо маселеси коюлат. Ал эми чөйрөнүн касиеттеринен көз каранды болгон учурда $k = k(u)$ коэффициентин аныктоо боюнча тескери маселе коюлат.

Мында белгилей кетчү нерсе – мындай тескери маселелерди квалификациялоо толук эмес, себеби баштапкы жана четки шарттар да белгисиз болуп калышы мүмкүн. Дагы каралып жаткан областтын өзү да анык эмес болуп калышы мүмкүн.

Ошентип, акустиканын теңдемеси үчүн гана белгисиз функциялардын санына жана түрүнө жараша ар кандай M_1 тескери маселелердин жыйындысын алабыз жана q символу менен белгилейли. Ошону менен катар f өлчөнүүчү чондуктардын (кошумча маалыматтар) санына жана тибине жараша M_2 тескери маселелердин вариациясын алса болот. Анда тескери маселени оператордук тендеменин жардамы менен символикалык түрдө төмөндөгүдөй жазсак болот:

$$A(q) = f\ ,$$

мында A – f өлчөнүүчү чондуктардын мейкиндигинде Q изделүүчү элементтердин көптүгүнө аракет этүүчү оператор.

Тескери маселе түшүнүгүн андан ары да жалпылоого болот, себеби кээде закон ченемдүүлүктүн (теңдеменин) өзү да белгисиз болуп калат. Бул учурда эксперименттердин (байкоолордун) жыйынтыгынын негизинде закон ченемдүүлүктү (теңдемени) түзүү зарыл. Ошону менен бирге математикалык формада (теңдемелерде) жаңы закон ченемдүүлүктү ачуунун алдында көптөгөн эксперименттер, ой жүгүртүүлөр жана талкуулар болушу абзел.

Тескери, корректтүү эмес эмес коюлган маселелерди чыгаруунун универсалдуу методу жок. Мындай маселелердин теориясынын негизин түзүүчүлөрү болуп А. Н. Тихонов [10], В. К. Иванов [2] жана М. М. Лаврентьев [7] саналат. А. Н. Тихоновдун пикири боюнча, корректтүү эмес маселелердин чыгарылышы тескери чагылдыруунун үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү теоремага негизделген жана шарттуу-корректтүү маселелер теориясынын жана аларды чыгаруунун эффективдүү сандык алгоритмдердин көптүгүн куруунун негизи болуп саналат [10]. В. К. Иванов тарабынан киргизилген квазичыгарылыштар түшүнүгү, биринчиден, чыгарылыш түшүнүгүн жалпылайт, экинчиден, корректтүүлүк шарттарын орнотот жана үчүнчүдөн, корректтүү эмес маселелердин жакындатылган чыгарылыштарын алуунун жаңы алгоритмдерин түзөт [2]. Ал эми М. М. Лаврентьевдин методу боюнча, бир нече класстагы алгебралык тендемелер системаларын, сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык тендемелердин чыгарылыштарынын сандык алгоритмдерин тургузууга болот [7].

Корректтүү эмес коюлган маселелер теориясынын негизи болуп регуляризациялоочу операторлордун түркүмү саналат. Тактап айтканда, регуляризациялоочу операторлордун түркүмү R_α операторлордон турсун дейли жана алардын ар бирөө $A(q) = f_\varepsilon$ тендемесинин $q_{\varepsilon\alpha} = R_\alpha f_\varepsilon$ жакындатылган чыгарылышын туруктуу түзүшсүн. Мында бул чыгарылыш ε каталыгынын деңгээли жана α регуляризациялоо параметри нөлгө умтулганда q так чыгарылышка жыйналат.

Адабияттар:

1. Аблабеков, Б. С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б. С. Аблабеков. - Бишкек: Илим, 2001.
2. Аблабеков, Б. С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи [Текст] / Б. С. Аблабеков // Наука и новые технологии. - 1999. - №4.
3. Аблабеков, Б. С. Локальная разрешимость многомерной обратной задачи для псевдопараболического уравнения [Текст] / Б. С. Аблабеков, А. Б. Байсеркеева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. - 2017. - № 7.
4. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач [Текст] / А. Л. Бухгейм. - Новосибирск: Наука, 1988.
5. Джаныбеков, Ч. Дж. Корректтүү эмес маселелерди чыгаруунун жакындатылган методдору : Жогорку окуу жайларынын “Колдонмо математика” адистигинин студенттери үчүн окуу куралы [Текст] / Ч. Дж. Джаныбеков, М. У. Мурзакматов. - Бишкек, 2022.
6. Костин, А. Б. О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения I [Текст] / А. Б. Костин, А. И. Прилепко // Дифференциальные уравнения. -1996 - Т.32. - №1.
7. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа [Текст] / М. М. Лаврентьев. - М.: Наука, 1980.
8. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики [Текст] / В. Г. Романов. - М.: Наука, 1984.
9. Романов, В. Г. Устойчивость в обратных задачах [Текст] / В. Г. Романов. - М.: Научный Мир, 2005.
10. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1986.
11. Щеглов, А. Ю. О равномерном приближении решения одной обратной задачи методом квазиобращений [Текст] / А. Ю. Щеглов // Математические заметки. -1993. -Том 53. - Выпуск 2.